



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه سؤال

تسلط بر کل کتاب



شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۱۰



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون جامع شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

زمان پاسخگویی	تعداد صفحه	درس
۱۲۰ دقیقه	۲	ریاضی

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

ریاضی ۳

کل کتاب

بودجه‌بندی این آزمون

استراتژی و هدف گذاری در آزمون شبیه‌ساز نهایی ماز

- تبدیل به یک دانش‌آموز حرفه‌ای در امتحان تشریحی و ۲۰ گرفتن
- تسلط بر نحوه تشریحی نوشتن در حد یک مصحح آموزش و پرورش
- تمام اشتباهات احتمالی در امتحان نهایی رو قبل از امتحان نهایی تجربه کنید

زودبسته

دوپینگ فوری برای شب امتحان

اگر قصد دارید خیلی زود به نمره ۲۰ برسید، دوره «زود ۲۰» برای شماست!

- ۱۱ مرحله آزمون شبیه‌ساز و پیش‌بینی نهایی برای ۱۱ درس امتحان نهایی
- تصحیح فوری آزمون شب امتحان به سبک آموزش و پرورش
- جزوه دوپینگ فوری شب امتحان + راهنمای کامل تشریحی نویسی ویژه هر درس

هدیه ویژه: بسته کتاب‌های ۲۰ شو در اپلیکیشن دیجی‌ماز



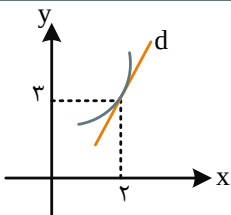


به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		تعداد صفحه: ۲	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه	
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی					
گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد، آن گاه $\tan \alpha > \sin \alpha$ است. ب) باقی مانده تقسیم چندجمله ای $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ بر $x+1$ برابر ۲ است. ج) در تابع $y = \sqrt{2-x}$ ، نقطه $x=2$ بحرانی است.	۰.۷۵			
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، حاصل $(g^{-1} \circ f)^{-1}(2)$ برابر است. ب) بزرگ ترین بازه ای که تابع $f(x) = x - 1 $ در آن اکیداً صعودی است به صورت است. ج) اگر صفحه ای با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را می نامیم. د) هرگاه دو پیشامد A و B با هم رخ ندهند، این دو پیشامد را می نامیم.	۱			
۳	با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y = -\frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.	۰.۷۵			
۴	اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{3+x} - 1$ باشد، آن گاه دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱			
۵	تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ مفروض است: الف) ضابطه تابع وارون را به دست آورید. ب) با رسم تابع، صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.	۱			
۶	شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx) + c$ می باشد. مقادیر a، b و c را به دست آورده و ضابطه آن را تشکیل دهید.	۱			
۷	حاصل عبارت $A = \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 11/25^\circ$ به دست آورید.	۰.۵			
۸	معادله مثلثاتی $\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱.۲۵			



به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		تعداد صفحه: ۲	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه	
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۹	حدود زیر را محاسبه کنید. ([] علامت جزء صحیح است) الف) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{2})^-} \frac{[x]}{\cos x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}$	۱.۷۵			
۱۰	با توجه به شکل مقابل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = 12$ باشد، معادله خط d را به دست آورید. 	۱			
۱۱	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x - 2 [x]$ را در $x = 2$ بررسی کنید.	۱			
۱۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+3}}$ ب) $g(x) = \sqrt{3x+2} (2x-5)^3$	۱.۷۵			
۱۳	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = 3x - \frac{4}{x}$ در بازه $[1, 4]$ با آهنگ تغییر لحظه ای تابع در چه نقطه ای از این بازه برابر است؟	۱.۲۵			
۱۴	اگر نقطه $A(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.	۱.۲۵			
۱۵	در مخروطی به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۵، استوانه ای محاط می کنیم که محورش بر محور مخروط منطبق باشد. اگر مساحت جانبی استوانه ماکزیمم باشد، شعاع قاعده استوانه را محاسبه کنید.	۱.۲۵			
۱۶	در یک بیضی افقی به مرکز $(-4, -1)$ ، اگر طول قطر کوچک آن ۶ واحد و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{4}{5}$ باشد، مطلوبست محاسبه: الف) طول قطر کانونی ب) فاصله کانونی	۱			
۱۷	معادله دایره ای به مرکز $(2, -3)$ را بنویسید که روی خط به معادله $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می کند.	۱.۲۵			
۱۸	ظرف A دارای ۶ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ظرف B دارای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. تاسی را به هوا پرتاب می کنیم، اگر عدد ظاهر شده روی تاس اول باشد از ظرف A و در غیر این صورت از ظرف B مهره ای را خارج می کنیم. با چه احتمالی این مهره سفید است؟	۱.۲۵			
۲۰	موفق باشید.				



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۱۰

تسلط بر کل کتاب



گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون های شبه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

پاسخبرگ ریاضی ۳

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

نکات مهم برای گرفتن نمره کامل!

۱ خوش خط و خوانا بنویسید:

دقت کنید که نوشته‌هایتان خوانا و مرتب باشند. این کار نه تنها به فهم بهتر مطالب توسط مصحح کمک می‌کند، بلکه نظم و دقت شما را نیز نشان می‌دهد.

۲ استفاده از کلمات و جملات مشابه کتاب درسی:

تلاش کنید پاسخ‌هایتان را با عبارات و اصطلاحات موجود در کتاب درسی هماهنگ کنید. این کار باعث می‌شود مصحح ببیند که به متن درسی تسلط دارید و مستقیماً از منابع درسی استفاده کرده‌اید.

۳ از نوشتن مطلب اضافی خودداری کنید:

به هیچ وجه از حاشیه‌پردازی و نوشتن مطالب اضافی که در سؤال مطرح نشده است، خودداری کنید. فقط به پاسخ مستقیم سؤال بپردازید و از اضافه کردن اطلاعات غیرضروری پرهیز کنید.

۴ نوشتن فرمول‌ها و مراحل کامل حل سؤال:

در مسائل محاسباتی، تنها جواب نهایی کافی نیست؛ شما باید مراحل کامل حل سؤال را به طور واضح و دقیق بنویسید. فرمول‌ها، مراحل محاسبه و دلایل انتخاب راه‌حل‌ها را حتماً ذکر کنید تا نشان دهید که روش حل مسئله را به خوبی متوجه شده‌اید.

۵ نوشتن یکاها و جواب نهایی:

در دروسی که نیاز به محاسبات دارند، فراموش نکنید که علاوه بر نوشتن جواب نهایی، یکاهای مربوط به هر کمیت را هم درج کنید. یکای صحیح می‌تواند نشان دهد که شما به جزئیات دقت کرده‌اید و درک صحیحی از مفهوم سؤال دارید.



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	پاسخبرگ	نمره
------	---------	------

پاسخهای خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.

۱	الف) ب) ج)	۰.۷۵
۲	الف) ب) ج) د)	۱
۳		۰.۷۵
۴		۱
۵	الف) ب)	۱



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۶		۱
۷		۰.۵
۸		۱.۲۵



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۹	(الف) (ب) (ج)	۱.۷۵
۱۰		۱
۱۱		۱



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
	نمره		
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱۲	(الف)	۱.۷۵
	(ب)	
۱۳		۱.۲۵
۱۴		۱.۲۵



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
	نمره		
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

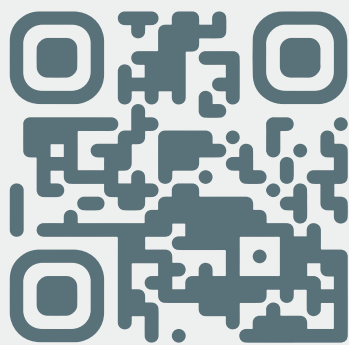
۱۵		۱.۲۵
۱۶	(الف) (ب)	۱
۱۷		۱.۲۵



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۶	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱۸	۱.۲۵
	موفق باشید. ۲۰



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه پاسخ

تسلط بر کل کتاب



شنبه

۱۴۰۴/۰۳/۱۰



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون جامع شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - شب امتحان

درسی	مسئول درس	ویراستاری
ریاضی	محدثه شیخعلی - سید جواد نظری	ارسلان حسنونند - حمیدرضا ولی پور نرجس تیمناک

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

زودبسته

دوپینگ فوری برای شب امتحان

اگه قصد دارید خیلی زود به نمره ۲۰ برسید، دوره «زود ۲۰» برای شماست!

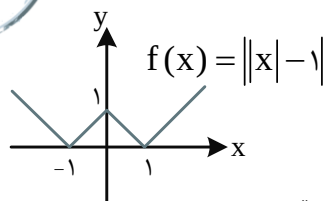
- ۱۱ مرحله آزمون شبیه‌ساز و پیش‌بینی نهایی برای ۱۱ درس امتحان نهایی
- تصحیح فوری آزمون شب امتحان به سبک آموزش و پرورش
- جزوه دوپینگ فوری شب امتحان + راهنمای کامل تشریحی‌نویسی ویژه هر درس

هدیه ویژه: بسته کتاب‌های ۲۰ شو در اپلیکیشن دیجی‌ماز





راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته:	علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۴/۰۳/۱۰	ساعت شروع:
مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه	گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره	
۱	مصحح شو: الف) نادرست (۰/۲۵) با توجه به دایره مثلثاتی مقابل می توان دریافت که اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ باشد، $\sin \alpha > \tan \alpha$ است. (خب! بار منفی تانژانت بیشتره) ب) نادرست (۰/۲۵) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow p(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = -4 + 3 - 1 = -2$ یادگیری بیشتر: در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $(ax + b), a \neq 0$، باقی مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. در نتیجه اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است. ج) درست (۰/۲۵) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$، به صورت $(-\infty, 2]$ است و می دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی اند، بنابراین $x = 2$، نقطه بحرانی تابع f است. شکلش رو هم ببین:	۰.۷۵	
۲	مصحح شو: الف) ۵۲ (۰/۲۵) $A = (g^{-1} \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2))$ $g(x) = 2x^2 - 1 \xrightarrow{x=2} g(2) = 2(4) - 1 = 7$ $A = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(7)$ می دانیم که اگر تابع f وارون پذیر باشد و $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، در این صورت $f(\beta) = \alpha$ است. پس: $f^{-1}(7) = A \Rightarrow f(A) = 7$ $f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow \sqrt{A-3} = 7 \Rightarrow A-3 = 49 \Rightarrow A = 52$ ب) $[1, +\infty)$ (۰/۲۵)	۱	



ابتدا نمودار تابع $f(x) = ||x| - 1|$ را رسم می کنیم:

با توجه به شکل فوق، بزرگترین بازه ای که تابع f در آن اکیداً صعودی است بازه $[1, +\infty)$ است.

(ج) سهمی (۰/۲۵) (د) ناسازگار (۰/۲۵)

مصحح شو:

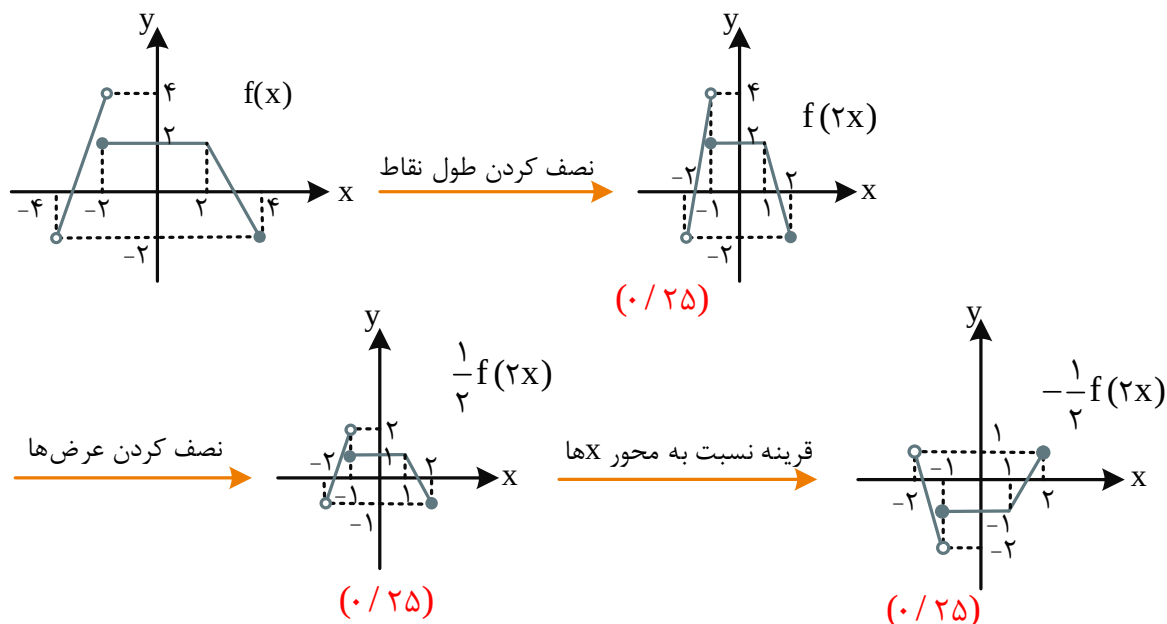
برای رسم نمودار $y = -\frac{1}{3}f(2x)$ مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) ابتدا در نمودار تابع f ، طول تمامی نقاط را نصف می کنیم (انقباض افقی).

(۲) سپس در نمودار حاصل شده، عرض تمامی نقاط را نصف می کنیم (انقباض عمودی).

(۳) در نهایت نمودار حاصل شده را نسبت به محور x قرینه می کنیم.

۰.۷۵



۳

مصحح شو:

$$f(x) = 1 - \sqrt{x-2} \Rightarrow D_f = [2, +\infty) \quad , \quad g(x) = \sqrt{3+x} - 1 \Rightarrow D_g = [-3, +\infty)$$

$$D_{gof} = \underbrace{\left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\left\{x \geq 2 \mid 1 - \sqrt{x-2} \geq -3\right\}}_{(۰/۲۵)}$$

$$1 - \sqrt{x-2} \geq -3 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 16 \xrightarrow{x \geq 2} 2 \leq x \leq 18$$

(۰/۲۵)

در نتیجه: $D_{gof} = [2, 18]$ (۰/۲۵)

۴



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مصَحَّح شو:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3; \quad D_f = R_f = \mathbb{R}$$

ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3 + 1 - 1 = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 4 \Rightarrow y = (x-1)^3 + 4$$

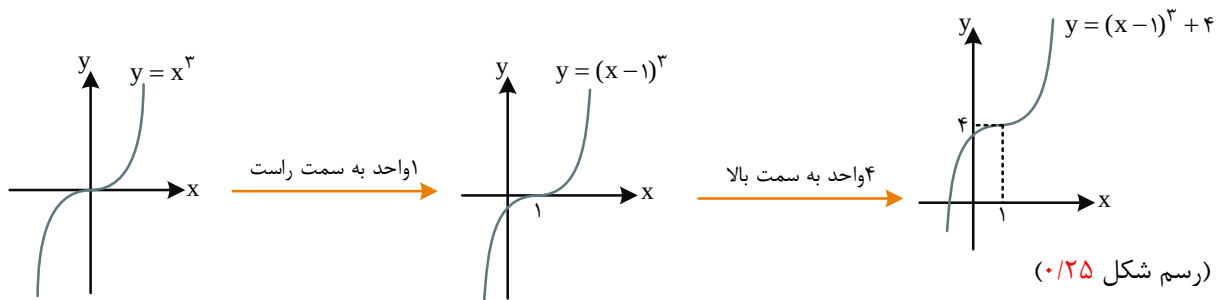
$$y - 4 = (x-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-4} = x-1$$

(الف)

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4} + 1, \quad D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}$$

(۰/۵)

ب) برای رسم تابع $y = (x-1)^3 + 4$ ، ابتدا تابع $y = x^3$ را رسم می کنیم، سپس آن را به اندازه ۱ واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم و در نهایت حاصل را به اندازه ۴ واحد و در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می کنیم:



(رسم شکل ۰/۲۵)

با توجه به نمودار رسم شده تابع $y = (x-1)^3 + 4$ در کل دامنه اش اکیداً صعودی است. (۰/۲۵)

راهنمای مصحح

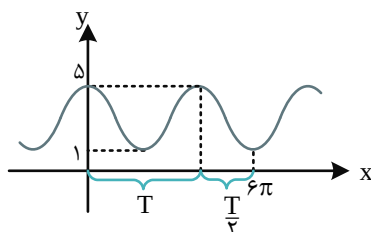
در صورتی که دانش آموز از کلمه «صعودی» استفاده کند، نمره تعلق می گیرد.

یادگیری بیشتر

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

مصَحَّح شو:

با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$T + \frac{T}{2} = 6\pi \Rightarrow \frac{3T}{2} = 6\pi \Rightarrow T = 4\pi, \quad \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$



از طرفی، بیشترین مقدار تابع برابر ۵ و کمترین مقدار آن برابر ۱ است، پس:

$$\begin{cases} \max = 5 \Rightarrow |a| + c = 5 \\ \min = 1 \Rightarrow -|a| + c = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \quad (0/25)$$

$$|a| + c = 5 \xrightarrow{c=3} |a| + 3 = 5 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ قق} \\ a = -2 \text{ غقق} \end{cases} \quad (0/25)$$

توجه ۱: می‌دانیم که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است، بنابراین علامت b تأثیری در ضابطه تابع ندارد.

توجه ۲: نمودار داده شده شبیه خود $\cos x$ است (در شروع از صفر نزولی است) بنابراین ضریب a مثبت است. لذا فقط $a = 2$ قابل قبول است.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \\ f(x) = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3 \end{cases} \quad (0/25)$$

در نتیجه ضابطه تابع برابر است با:

نکات طلایی

در توابع مثلثاتی $y = a \cos(bx + d) + c$ و $y = a \sin(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max &= |a| + c \quad \text{مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos| : بیشترین مقدار} \\ \Rightarrow \min &= -|a| + c \quad \text{مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos| : کمترین مقدار} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

مصحح شو:

با توجه به رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ داریم:

$$A = \frac{\sin x \cos x \cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x \right) = \frac{1}{4} \sin 4x \quad (0/25)$$

$$A = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x=1/25^\circ} A = \frac{1}{4} \sin(4 \times 11/25^\circ) = \frac{1}{4} \sin 45^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (0/25)$$

روابط مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

مصحح شو:

$$\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0}_{(0/25)} \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \quad (0/25) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \quad (0/25) \end{cases}$$

۱.۲۵

$$\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \xrightarrow{-1 \leq \sin x \leq 1} \text{غرق} \quad (0/25)$$

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی

مصحح شو:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^3 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} = ?$$

برای رفع ابهام از حد فوق، صورت و مخرج آن را در قسمت چاق عبارت $(\sqrt[3]{x} - 2)$ ضرب می‌کنیم:

۱.۷۵

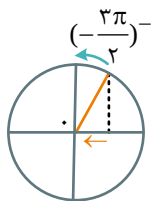
$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^3 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x-8)} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} x(\sqrt[3]{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 8(\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4) = 8(4 + 4 + 4) = 8 \times 12 = 96 \quad (0/25)$$

۹

ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{2})^-} \frac{[x]}{\cos x}$

زمانی که $x \rightarrow (-\frac{3\pi}{2})^-$ میل می کند، انتهای کمان x در ناحیه اول مثلثاتی قرار دارد، پس:



$$x \rightarrow (-\frac{3\pi}{2})^- : \cos x \rightarrow 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{2})^-} \frac{[x]}{\cos x} = \frac{[-\frac{3\pi}{2}]}{0^+} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^+} = -\infty \quad (0/0)$$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x|x|+1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad (0/0)$$

توجه داشته باشید زمانی که $x \rightarrow -\infty$ میل می کند، داریم: $|x| = -x$

یادگیری بیشتر:

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$ ؛ $(m, n \in \mathbb{N})$ ، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند که در این

صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود. برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$	حاصل حد	نوع
$n > m$	$+\infty$ یا $-\infty$	درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.
$n = m$	$\frac{a}{a'}$	درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.
$n < m$	صفر	درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.

مصحح شو:

۱ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = 12 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = 12$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x + 2} = 12 \quad (0/0)$$

با توجه به نمودار داده شده، $f(2) = 3$ است، پس:

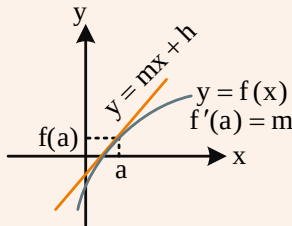
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{f(2) + 3}{2 + 2} = 12 \Rightarrow \underbrace{\frac{6}{4} f'(2)}_{(0/25)} = 12 \Rightarrow f'(2) = 8$$

می دانیم که شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $x = 2$ با $f'(2)$ برابر است، پس:

$$\begin{cases} f'(2) = m_d = 8 \\ (2, 3) \in d \end{cases} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 8(x - 2) \Rightarrow y = 8x - 13 \quad (0/25)$$

یادگیری بیشتر

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می کند.



مصحح شو:

$$f(x) = |x - 2| [x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$$

بررسی شرط پیوستگی:

تابع f در $x = 2$ پیوسته است. (0/25)

بررسی مشتق پذیری:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| [x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2) [x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = [2^+] = 2 \quad (0/25)$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| [x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2) [x]}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} -[x] = -[2^-] = -1 \quad (0/25)$$

چون که $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ است، بنابراین تابع f در $x = 2$ مشتق ناپذیر است. (0/25)

یادگیری بیشتر

تابع f را در نقطه $x = a$ مشتق پذیر گوئیم، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{یعنی: } x = a \text{ پیوسته باشد، یعنی: } (1)$$

(2) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشد، یعنی: $f'_+(a) = f'_-(a)$

مصحح شو:

۱.۷۵

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} \quad \text{الف)}$$

۱۲

$$f' = \frac{\left(\frac{x}{x^2+3}\right)'}{\sqrt[2]{x^2+3}} = \frac{\overbrace{(1)(x^2+3) - (2x)(x)}^{(0/5)}}{\underbrace{(x^2+3)^2}_{(0/25)}} = \frac{-x}{(x^2+3)^2}$$

$$b) g(x) = \sqrt{3x+2} (2x-5)^3$$

$$g'(x) = (\sqrt{3x+2})'(2x-5)^3 + ((2x-5)^3)'(\sqrt{3x+2})$$

$$g'(x) = \underbrace{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}_{(0/25)} \underbrace{(2x-5)^3}_{(0/25)} + \underbrace{(3(2x-5)^2)}_{(0/25)} \underbrace{(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)}$$

قواعد مشتق گیری:

$$\bullet y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\bullet y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$$

$$\bullet y = (f(x))^n \rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1} \quad \bullet y = \sqrt[n]{f(x)^m} \rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-m}}}$$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر.

$$\bullet f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$$

مصحح شو:

$$f(x) = 3x - \frac{4}{x}$$

$$[1, 4] \quad \text{آهنگ تغییر متوسط در بازه} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{11 - (-1)}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad (0/25)$$

$$1.25 \quad f'(x) = 3 + \frac{4}{x^2} \quad (0/25)$$

برای اینکه بدانیم در چه نقطه‌ای آهنگ تغییر متوسط با آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است باید معادله $f'(x) = 4$ را حل کنیم:

$$3 + \frac{4}{x^2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{x \in [1, 4]} x = 2 \quad (0/25)$$

۱۳

۲۰ شو

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

مصحح شو:

می‌دانیم که نقطه $A(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ است، پس:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 + b(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4a + 2b = 1 \Rightarrow 4a + 2b = -7 \quad (0/25)$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{(2,0) \in f'} 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \quad (0/25)$$

۱.۲۵

$$\begin{cases} 4a + 2b = -7 \\ 4a + b = -12 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = -\frac{17}{4} \\ b = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

۱۴

یادگیری بیشتر

با فرض اینکه تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، در این صورت:

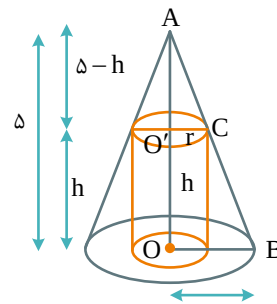
$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$$

مصحح شو:

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، استوانه‌ای به شعاع قاعده r و ارتفاع h در داخل مخروطی به شعاع قاعده 2 و ارتفاع 5 محاط شده است. حال در مثلث قائم‌الزاویه AOB به کمک تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$O'C \parallel OB \Rightarrow \frac{AO'}{AO} = \frac{O'C}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{5-h}{5} = \frac{r}{2} \Rightarrow 5r = 10 - 2h \Rightarrow 2h = 10 - 5r \Rightarrow h = 5 - \frac{5}{2}r \quad (*)$$



از طرفی، مساحت جانبی استوانه برابر است با:

$$S = 2\pi rh \xrightarrow{(*)} S = 2\pi r(5 - \frac{5}{2}r) \Rightarrow S = 10\pi r - 5\pi r^2 \quad (0/25)$$

۱.۲۵

۱۵

حال از تابع مساحت مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم (توجه داشته باشید که $0 < r < 2$ است).

$$S'(r) = 0 \Rightarrow 10\pi - 10\pi r = 0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 10\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 1 \quad (0/25)$$

مسائل بهینه‌سازی

- ۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می‌آوریم.
- ۲) رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل می‌کنیم.
- ۳) از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم.
- ۴) به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

مصحح شو:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a \quad (0/25)$$

روش اول: خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{4}{5}$ است، پس:

$$BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

می دانیم که در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، لذا:

$$a^2 = 3^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \Rightarrow a^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2 \Rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 25$$

$$\xrightarrow{a>0} a = 5 \quad (0/25) \xrightarrow{c=\frac{4}{5}a} c = \frac{4}{5} \times 5 = 4$$

$$AA' = 2a = 2 \times 5 = 10 \quad (0/25)$$

الف) طول قطر کانونی:

$$FF' = 2c = 2 \times 4 = 8 \quad (0/25)$$

ب) فاصله کانونی:

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} c = 4k \\ a = 5k \end{cases} \quad (0/25) \quad BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

روش دوم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25k^2 = 9 + 16k^2 \Rightarrow 9k^2 = 9 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \quad (0/25)$$

بنابراین: طول قطر کانونی (الف): $AA' = 2a = 10 \quad (0/25)$

فاصله کانونی (ب): $FF' = 2c = 8 \quad (0/25)$

یادگیری بیشتر:

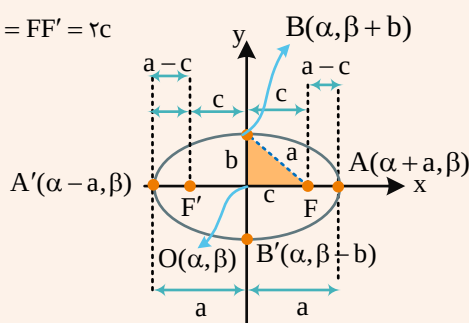
$$\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases} \quad \begin{cases} AA' = 2a = \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} \\ BB' = 2b = \text{قطر کوچک (قطر ناکانونی)} \\ FF' = 2c = \text{فاصله کانونی} \end{cases}$$

$$BF' = BF = B'F = B'F' = a$$

(با توجه به مثلث قائم الزاویه OBF)

فاصله یک کانون تا دورترین رأس $a + c$

فاصله یک کانون تا نزدیکترین رأس $a - c$



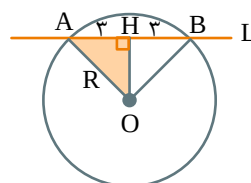
مصحح شو:

نقطه $O(2, -3)$ مرکز این دایره است. فاصله نقطه O را از خط $L: 3x - 4y + 2 = 0$ به دست می آوریم:

۱.۲۵

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad (0/25)$$

$$OH = \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4 \quad (0/25)$$



۱۷

می دانیم که طول وتر جدا شده برابر $AB = 6$ است، پس: $AH = HB = 3$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه AOH داریم:

$$\underbrace{OA^2 = AH^2 + OH^2}_{(0/25)} \Rightarrow R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5 \quad (0/25)$$

حال با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادله آن را تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} O(2, -3) \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow \underbrace{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25}_{(0/25)}$$

اوضاع نسبی خط و دایره

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می کنیم (OH). حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره داریم:

خط l ، با دایره متقاطع است. $OH < r$	خط l ، بر دایره مماس است. $OH = r$	خط l ، دایره را قطع نمی کند. $OH > r$

خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.

فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مصحح شو:

می دانیم که اگر تاسی را به هوا پرتاب کنیم، در $\frac{1}{4}$ حالت ها عدد ظاهر شده روی تاس عددی اول

و در $\frac{1}{4}$ حالت ها عدد ظاهر شده روی تاس، عددی غیر اول است، پس:

۶ سفید ۲ سیاه A	۵ سفید ۳ سیاه B
-----------------------	-----------------------

۶ مهره انتخابی از ظرف A، سفید باشد. $\frac{1}{2}$ عدد روی تاس، اول باشد $\frac{1}{8}$

۵ مهره انتخابی از ظرف B، سفید باشد. $\frac{1}{2}$ عدد روی تاس، اول نباشد $\frac{5}{8}$

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{8}\right)}_{(0/5)} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}\right)}_{(0/5)} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{8} + \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{8} = \frac{11}{16} \quad (0/25)$$

راهنمای مصحح

اگر دانش آموزی پاسخ صحیح را به روش نمودار درختی به دست آورد، به تناسب پاسخ، نمره تعلق می گیرد.

دوینگ

فروری

شب

امتحان

خلاصه کامل و جامع

برای مرور سریع

پایه دوازدهم (تجربی)

ریاضی ۳



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



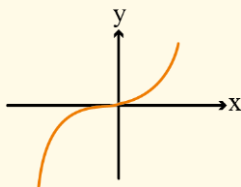
یکنوایی توابع:

نکته طلایی

اگر تابع f اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد آن‌گاه یک‌به‌یک است اما برعکس آن درست نیست.

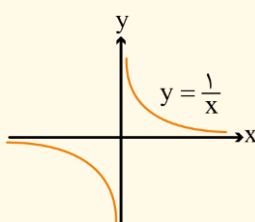
مثال ۱:

تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.



مثال ۲:

تابع $y = \frac{1}{x}$ تابعی یک‌به‌یک است اما اکیداً یکنوا نیست.



نکته طلایی

در مورد یکنوایی توابع:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	نزولی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	اکیداً صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	اکیداً نزولی

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

نکته طلایی

اگر در بازه‌ای $f'(x) \geq 0$ باشد:

(۱) اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی است.

(۲) اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است.

مثال:

در تابع $f(x) = x^3$ مشتق تابع $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ است و چون فقط در $x = 0$ مشتق برابر با صفر است، بنابراین تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است.

نکته طلایی

اگر در بازه‌ای $f'(x) \leq 0$ باشد:

(۱) اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً نزولی است.

(۲) اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

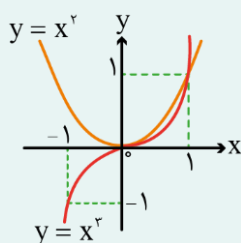
نکته طلایی

در مقایسه توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ داریم:

در بازه $(0, 1)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

در بازه $(-\infty, 0)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.

در بازه $(1, +\infty)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.





نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور X ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور X ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور Y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور Y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور Y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور X ها و سپس نسبت به محور Y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور X ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور X ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور Y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور Y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور X ها قرار دارد را نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم.
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور Y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور Y ها را نسبت به محور Y ها قرینه می‌کنیم.
$ y = f(x)$	ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور X ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور X ها را نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم.

نکته طلایی

در فرایند رسم تابع $y = af(bx+c)+d$ ، از روی تابع $f(x)$ ، ترتیب مراحل به‌صورت زیر است:

- الف) تأثیرات روی دامنه
- (۱) تأثیر عدد ثابت c
 - (۲) تأثیر ضریب x (b)
- ب) تأثیرات روی برد
- (۱) تأثیر ضریب f (a)
 - (۲) تأثیر عدد ثابت d

نکته طلایی

در تابع $y = af(bx+c)+d$ ، تأثیر a و d روی برد تابع و تأثیر c و b روی دامنه تابع است.

نکته ۳:

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[m, n]$ باشد دامنه تابع $g(x) = af(bx+c)+d$ برابر است با:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{دامنه}} m \leq x \leq n \xrightarrow[\text{پیدا می‌کنیم.}]{\text{محدوده ورودی } f \text{ را}} m \leq x \leq n$$

↓
ورودی

محاسبه محدوده X که همان دامنه g است. $m \leq bx+c \leq n \Rightarrow$ ورودی f محدوده ثابتی دارد.





مثال:

اگر دامنه تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2} - 4\right) + 3$ برابر $[-2, 6]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x + 1)$ را به دست آورید.

دامنه: $-2 \leq x < 6$

محدوده ورودی f را محاسبه می‌کنیم:

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow -5 \leq \frac{x}{2} - 4 < -1 \Rightarrow -5 \leq f \text{ ورودی} < -1 \Rightarrow -5 \leq 2x + 1 < -1 \Rightarrow -6 \leq 2x < -2 \Rightarrow -3 \leq x < -1$$

$$\Rightarrow D_g = [-3, -1)$$

نکته طلایی

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n+1$$

$$[x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \geq n \Rightarrow x \geq n$$

$$[x] \leq n \Rightarrow x < n+1$$

مثال:

$$[x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2$$

$$[x] < 4 \Rightarrow x < 4$$

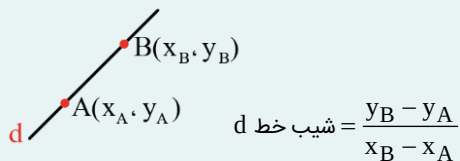
$$[x] \leq 4 \Rightarrow x < 5$$

$$-1 < [x] \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x < 4$$

$$-1 \leq [x] < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$$

نکته طلایی

تابع $f(x) = ax + b$ ، تابعی خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.



تابع وارون

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

مثال:

در تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، حاصل $f^{-1}(3)$ را به دست آورید.

فرض می‌کنیم که $f^{-1}(3) = \alpha$ باشد در این صورت به جای حل این معادله، معادله $f(\alpha) = 3$ را حل می‌کنیم، پس:

$$f(\alpha) = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+3} = 3 \Rightarrow \alpha+3 = 9 \Rightarrow \alpha = 6$$

پس $f^{-1}(3) = 6$ است.

نکته طلایی

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

مثال:

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به دست آورید:

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -8x+3 \Rightarrow 2y-3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8}$$



نکته طلایی

برای این که نشان دهیم دو تابع وارون پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g ، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = x \\ (g \circ f)(x) = x \end{cases}$$

مثال:

نشان دهید که توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{(3x-4)+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

ترکیب توابع:

اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

مثال:

اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x + 1$ باشند، ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را به دست آورید.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، پس در تابع $g(x)$ به جای x ها، تابع $f(x) = x^2 - 2$ را جایگذاری و ساده می‌کنیم.

$$g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

نکته طلایی

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال:

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$\begin{aligned} \begin{cases} D_f = [1, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} &\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \\ &\Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

معادلات مثلثاتی:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



مثال: ✂

معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: ✂

معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ است، پس:

$$(1 - 2\sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: ✂

معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

نکته طلایی: ☀

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مثال: ✂

معادله مثلثاتی $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 &\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x = 5 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

مثال:

مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\sin 15^\circ$ مثبت است پس:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

به عنوان تمرین $\sin 22.5^\circ$ رو خودتون به‌دست بیارین!

مثال:

مقدار عددی $\cos 22.5^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\cos 22.5^\circ$ مثبت است پس:

$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \begin{cases} 2 \sin x \cos x \\ 2 \tan x \\ 1 + \tan^2 x \end{cases} \\ \cos 2x &= \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 \\ 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \\ 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \\ \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{cases} \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

دوره تناوب توابع:

دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{aligned} y &= a \sin^n (bx + c) + d \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ فرد } n \\ T = \frac{\pi}{|b|} \text{ زوج } n \end{cases} \\ y &= a \cos^n (bx + c) + d \\ y &= a \tan^n (bx + c) + d \xrightarrow{\begin{matrix} n \text{ چه زوج باشد} \\ \text{و چه فرد} \end{matrix}} T = \frac{\pi}{|b|} \\ y &= a \cot^n (bx + c) + d \end{aligned}$$





$$y = |a \sin(bx + c)| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \cos(bx + c)| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

مثال:

$$y = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = \cos^2 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

$$y = |\sin 3x| \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow y = \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

نکته طلایی

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y = a \cos(bx + d) + c$ و $y = a \sin(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + |\text{ضرب} \sin \text{ یا } \cos|: \text{ بیشترین مقدار} \\ \min &= -|a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + |\text{ضرب} \sin \text{ یا } \cos|: \text{ کمترین مقدار} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضرب} x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضرب} x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

مثال:

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید:

$$\bullet y = -3 \cos 2\pi x + 1 \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \\ \max = |a| + c = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\bullet y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{2} \right|} = 4 \\ \max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \\ \min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet y = 1 - 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} x \right) \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left| -\frac{\pi}{3} \right|} = 6 \\ \max = |a| + c = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \min = -|a| + c = -|-2| + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$





مثال:

معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.
می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-4, 4]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \xrightarrow{|a|+c=4} |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

حال:

$$\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm\pi \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm\pi x) \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \sin(\pi x) \\ y = -4 \sin(-\pi x) \\ y = 4 \sin(-\pi x) \\ y = -4 \sin(\pi x) \end{cases}$$

رفع ابهام:

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.
در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارتهای رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفر کننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$

مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(2 + \sqrt{x+1})}{(2)^2 - (\sqrt{x+1})^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(2 + \sqrt{x+1})}{4 - (x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\cancel{x-3})(2 + \sqrt{x+1})}{-(\cancel{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} (-(x+3)(2 + \sqrt{x+1})) = -6 \times 4 = -24$$

۲) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\cancel{x-3})(x-2)}{(\cancel{x-3})(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{5}$

۳) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})} = \frac{1}{1 \times (3)} = \frac{1}{3}$$



نکته طلایی

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

مثال:

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2} = \frac{-2+1}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

توجه:

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم

$\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به

جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$-\infty$ یا $+\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر



مثال:

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(-\infty)^2 = -2(+\infty) = -\infty$$

مشتق:

مشتق تابع $f(x)$ در $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با انتخاب $x - a = h$ داریم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال ۱:

اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1-x)(1+x)}{x+1} = 2$$

مثال ۲:

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + 1$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

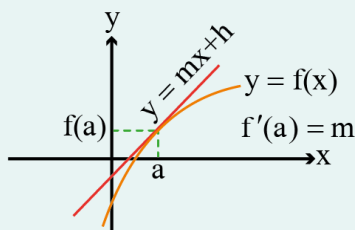
مثال ۳:

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 5$ به دست آورید.

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

نکته طلایی

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می‌کند.



مثال:

با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ به دست آورید.

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 2$$





- $y = c, c \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \longrightarrow y' = a$
- $y = kf(x) \longrightarrow y' = kf'(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \longrightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = f(x) \pm g(x) \longrightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $f(x) \times g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = (f(x))^n \longrightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \longrightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$
- $f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر:

نکته طلایی

چندتا مشتق مهم کتاب:

- $y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = \sqrt[3]{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- $y = \frac{1}{x} \longrightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$

حالا بریم چندتا مثال باهم ببینیم ...

مثال:

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

- $y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \longrightarrow y' = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$
- $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4 \longrightarrow y' = \frac{-1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4 + 4(2\sqrt{x}-1)^3\left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0\right)\left(\frac{1}{x}\right)$
- $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^\Delta \longrightarrow y' = \Delta\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^{\Delta-1}\left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2}\right)$
- $y = (\sqrt{3x+2})(x^2+1) \longrightarrow y' = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$
- $y = (x^2+1)^3(\Delta x-1) \longrightarrow y' = 3(2x)(x^2+1)^2(\Delta x-1) + \Delta(x^2+1)^3$
- $y = \left(\frac{-3x+1}{x^2+\Delta}\right)^\Lambda \longrightarrow y' = \Lambda\left(\frac{-3x+1}{x^2+\Delta}\right)^{\Lambda-1} \times \frac{-3(x^2+\Delta) - 2x(-3x+1)}{(x^2+\Delta)^2}$



مثال: ✂

اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) = 15x^2 - 8x - 3 \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x) = 30x - 8$$

$$\xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 30(-1) - 8 = -30 - 8 = -38$$

مثال: ✂

اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است محاسبه موارد زیر:

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$$

مثال: ✂

اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ باشد، حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = (5)(8) + (-6)(3) = 40 - 18 = 22$$

مشتق پذیری: 🌐

نکته طلایی: 🌟

تابع f را در نقطه $x = a$ مشتق پذیر گوئیم، هرگاه:
(۱) تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

(۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و باهم برابر باشند، یعنی:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

مثال: ✂

$$\text{مشتق پذیری تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \text{ را در } x = -1 \text{ بررسی کنید.}$$

اول پیوستگی تابع f را در $x = -1$ بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2x + 6 = 4 \end{cases}$$

تابع f در $x = -1$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x = -1$ باهم برابرند یا خیر.

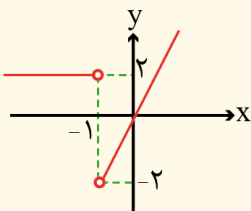
$$\begin{cases} f'_+(x) = 2x \longrightarrow f'_+(-1) = -2 \\ f'_-(x) = 2 \longrightarrow f'_-(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

پس تابع f در $x = -1$ ، پیوسته ولی مشتق ناپذیر است.
حالا اگه تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases} \quad (*)$$

آقا! چرا نوی قسمت (*) علامت مساوی رو نداشتیم؟ گفتیم که تابع f نوی $x = -1$ مشتق پذیر نیست پس $x = -1$ نمی تونه نوی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه.

حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:





مثال:

به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = -2$ بررسی کنید.

اول از همه باید پیوستگی تابع f را در $x = -2$ بررسی کنیم (خودت بررسی کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست را برای $x = -2$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = -4 \\ f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = 4 \end{cases}$$

تابع f در $x = -2$ مشتق ناپذیر است. $\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2)$ موجود نیست.

نکته طلایی

اگر u تابعی بر حسب x و $y = f(u)$ باشد آنگاه:

$$y' = u' f'(u)$$

$$y = f^n(u) \Rightarrow y' = n f^{n-1}(u) \times u' f'(u)$$

مثال:

$$y = f(\sqrt{x} + 4x^2) \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x \right) f'(\sqrt{x} + 4x^2)$$

$$y = f^3(3x^4) \Rightarrow y' = 3f^2(3x^4) \cdot (12x^3) f'(3x^4)$$

آهنگ تغییر:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال:

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$f \text{ آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

نکته طلایی

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال:

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } x = t = f'(t) = 2t - 1$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ باهم برابر باشند، پس:

$$2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$



نقاط بحرانی:

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از:
- نقاط ابتدا و انتهای بازه
 - نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.
 - نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.

مثال:

نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.
ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x = -2$ و $x = 2$ بحرانی‌اند.
از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x = -2$ و $x = +2$ ، $x = 0$

اکسترم نسبی:

برای پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی یک تابع پیوسته به روش زیر عمل می‌کنیم:

- (۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - (۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - (۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.
 - (۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:
- اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
 - اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
 - اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.
- توجه:** هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نسبی نیست.

مثال:

در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین $x = -3$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f		↗	↘	↗
		max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow \text{طول max نسبی} \\ x = 1 \rightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \rightarrow \text{نسبی max} \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \rightarrow \text{نسبی min} \end{cases}$$

نکته طلایی

با فرض این‌که تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد در این صورت:

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ f(a) &= b \end{aligned} \right\}$$



مثال:

اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.
چون نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(2) = 1$ و ثانیاً $f'(2) = 0$ است:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{4b+d=-7} d = 5$$

اکسترمم مطلق:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:

(۱) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

(۲) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به دست می‌آوریم.

(۳) از بین مقادیر به دست آمده در مرحله ۲، بیش‌ترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.

توجه:

در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.

مثال:

اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود تعیین کنید.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-1, 3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

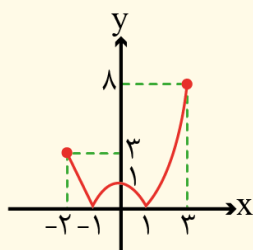
پس $x = -1$ و $x = 3$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x = 1$ ، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به ازای نقاط بحرانی به دست بیاوریم:

$$f(x) = x^3 - 3x + 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \longrightarrow f(1) = 1 - 3 + 7 = 5 \rightarrow \text{min مطلق} \\ x = -1 \longrightarrow f(-1) = -1 + 3 + 7 = 9 \\ x = 3 \longrightarrow f(3) = 27 - 9 + 7 = 25 \rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

مثال:

نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کرده و با توجه به آن نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.

با توجه به نمودار زیر:



نقطه مینیمم مطلق } نقطه $(-1, 0)$
نقطه مینیمم نسبی } نقطه $(0, 1)$
نقطه ماکزیمم نسبی } نقطه $(1, 0)$
نقطه مینیمم مطلق } نقطه $(3, 8)$
نقطه ماکزیمم مطلق } نقطه $(-2, 3)$

حل مسائل بهینه‌سازی:

(۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می‌آوریم.

(۲) رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.

(۳) سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم.

(۴) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.



مثال:

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.
(۱) کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p = xy$ کمترین باشد.
(۲) باتوجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y - x = 10$ است حال باید رابطه به‌دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p = xy \\ y - x = 10 \rightarrow y = 10 + x \end{cases} \Rightarrow p = x(10 + x) = x^2 + 10x$$

حال از رابطه تک‌متغیره $p = x^2 + 10x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$p' = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5 \xrightarrow{y=10+x} y = 5$$

مثال:

می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کمترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h \quad (*)$$

$\downarrow$ $\swarrow$
 سطح قاعده سطح جانبی

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر 27π مترمکعب است یعنی:

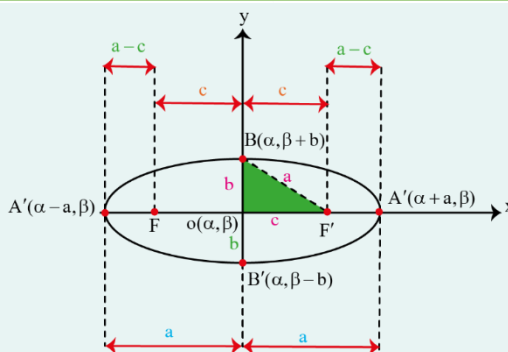
$$V = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow r^2 h = 27$$

حال باید به کمک $r^2 h = 27$ ، رابطه (*) را به‌صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} S = \pi r^2 + 2\pi r h \\ r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{27}{r^2} \end{cases} \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$$

$$\Rightarrow S'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{h=\frac{27}{r^2}} h = 3$$

بیضی:



$$\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases}$$

$$BF' = BF = B'F = B'F' = a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (OBF' \text{ به مثلث قائم‌الزاویه})$$

$$a + c = \text{فاصله یک کانون تا دورترین رأس}$$

$$a - c = \text{فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس}$$

$$\begin{cases} \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} = AA' = 2a \\ \text{قطر کوچک (قطر ناکانونی)} = BB' = 2b \\ \text{فاصله کانونی} = FF' = 2c \end{cases}$$



خروج از مرکز بیضی:

(۱) مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

(۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. ($0 < e < 1$)

(۳) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

(۴) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال:

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = 5$ و $b = 3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

می‌دانیم که فاصله کانونی برابر $2c$ است پس:

$$FF' = 2c = 8$$

مثال:

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.

$$\begin{cases} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$\text{فاصله کانونی} = FF' = 2c = 2\sqrt{7}$$

حال در این مثال اگر مرکز بیضی افقی با مختصات $(4, 5)$ باشد مختصات دو سر قطر بزرگ و مختصات دو سر قطر کوچک را به دست آورید.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A'(\alpha + a, \beta) = A'(4 + 4, 5) = A'(8, 5) \\ A(\alpha - a, \beta) = A(4 - 4, 5) = A(0, 5) \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \alpha \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \beta \end{matrix} \\ &\begin{cases} B(\alpha, \beta + b) = B(\alpha, 5 + 3) = B(\alpha, 8) \\ B'(\alpha, \beta - b) = B'(\alpha, 5 - 3) = B'(\alpha, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

مثال:

خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مطلوبست محاسبه:

(الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی

$$2b = 6 \longrightarrow b = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \xrightarrow{c^2 = a^2 - b^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a^2 - 9}{a^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow 16a^2 = 25a^2 - 225$$

$$\Rightarrow 9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = \frac{225}{9} = 25 \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}} \frac{c}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = 4$$

$$\text{طول قطر بزرگ} = 2a = 10$$

$$\text{فاصله کانونی} = 2c = 8$$

(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ بیضی:

$$\begin{aligned} &(-4, -1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -1 \end{cases} \\ &\text{مختصات مرکز بیضی} \\ &A'(\alpha + a, \beta) = A'(-4 + 5, -1) = A'(1, -1) \\ &A(\alpha - a, \beta) = A(-4 - 5, -1) = A(-9, -1) \end{aligned}$$



اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

مثال:

اگر معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد مطلوبست:
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 = (2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 0)$$

ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور X ها و محور Y ها:
برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور X ها، باید در معادله دایره، $y = 0$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل تقاطع دایره با محور X ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور Y ها، باید در معادله دایره، $x = 0$ را قرار دهیم:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0, \sqrt{3})$ و $(0, -\sqrt{3})$ محل تقاطع دایره با محور Y ها هستند.

نکته:

اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، داریم:

$$\text{مختصات مرکز دایره: } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{شعاع دایره: } r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

مثال:

معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right) \Rightarrow O(3, -1)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 - 4(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

در مثال فوق، معادله دایره را به صورت استاندارد بنویسید:

$$\begin{cases} O(3, -1) \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$



برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH) حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط ℓ با دایره متقاطع است	خط ℓ بر دایره مماس است	خط ℓ دایره را قطع نمی‌کند
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$

یادآوری:

خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.
فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال:

وضعیت خط $x + y = 1$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ مشخص نمایید.
ابتدا مختصات مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) \Rightarrow O(-1, -1)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x + y - 1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|(1 \times -1) + (1 \times -1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.1$$

شعاع دایره را به دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می‌کنیم:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - (-4)} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1.7$$

چون $\frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{3}$ است پس $OH > r$ است در نتیجه خط $x + y = 1$ دایره را قطع نمی‌کند.

مثال:

معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

برای نوشتن معادله یک دایره به دو چیز نیاز داریم: (۱) مختصات مرکز دایره (۲) شعاع دایره

می‌دانیم که خط به معادله $3x - 4y - 3 = 0$ بر دایره مماس است در نتیجه فاصله مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره است پس:

$$\text{شعاع دایره} = r = OH = \frac{|(3 \times 0) - (4 \times 3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

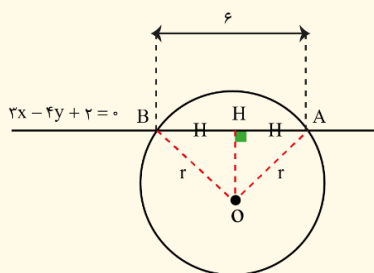
$$\begin{cases} O(0, 3) \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

مثال:

مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتر به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.

ابتدا شکلی رسم کرده و اطلاعات مسئله را روی آن پیاده می‌کنیم:

حال فاصله مرکز دایره را از خط $3x - 4y + 2 = 0$ به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} O(2, -3) \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow OH = \frac{|(3 \times 2) - (4 \times -3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

می‌دانیم که دو مثلث OHA و OHB ، همنهشت هستند پس $AH = BH = \frac{AB}{2} = 3$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OHA داریم:

$$(OA)^2 = (OH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OA = r = 5$$

در نتیجه معادله دایره موردنظر برابر است با:

$$\begin{cases} O(2, -3) \\ r = 5 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المركزین) برابر d باشد، داریم:

$d > r + r'$	$d = r + r'$	$ r - r' < d < r + r'$	$d = r - r' $	$d < r - r' $
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

توجه شود که اگر $d = 0$ باشد دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.

برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ ؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم.

(۲) سپس طول خط‌المركزین دو دایره $d = |OO'|$ را نیز به دست می‌آوریم.

(۳) در نهایت $(r + r')$ و $|r - r'|$ را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه $d = |OO'|$ مقایسه می‌کنیم.



مثال:

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.
برای نوشتن معادله یک دایره به دو پارامتر احتیاج داریم: (۱) مختصات مرکز دایره و (۲) شعاع دایره
از طرفی می‌دانیم که اگر دو دایره مماس درون باشند $d = |r - r'|$ است پس:

$$C': x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'(2, 3) \\ r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4(-3)} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

حال طول خط‌المركزین دو دایره را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} O(-1, -1) \\ O'(2, 3) \end{cases} \quad d = OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

باید $d = |r - r'|$ باشد، پس:

$$5 = |r - 4| \Rightarrow \begin{cases} r - 4 = 5 \rightarrow r = 9 \quad \checkmark \\ r - 4 = -5 \rightarrow r = -1 \quad \text{غ ق} \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره موردنظر برابر $r = 9$ و مرکز آن $O(-1, -1)$ است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$$